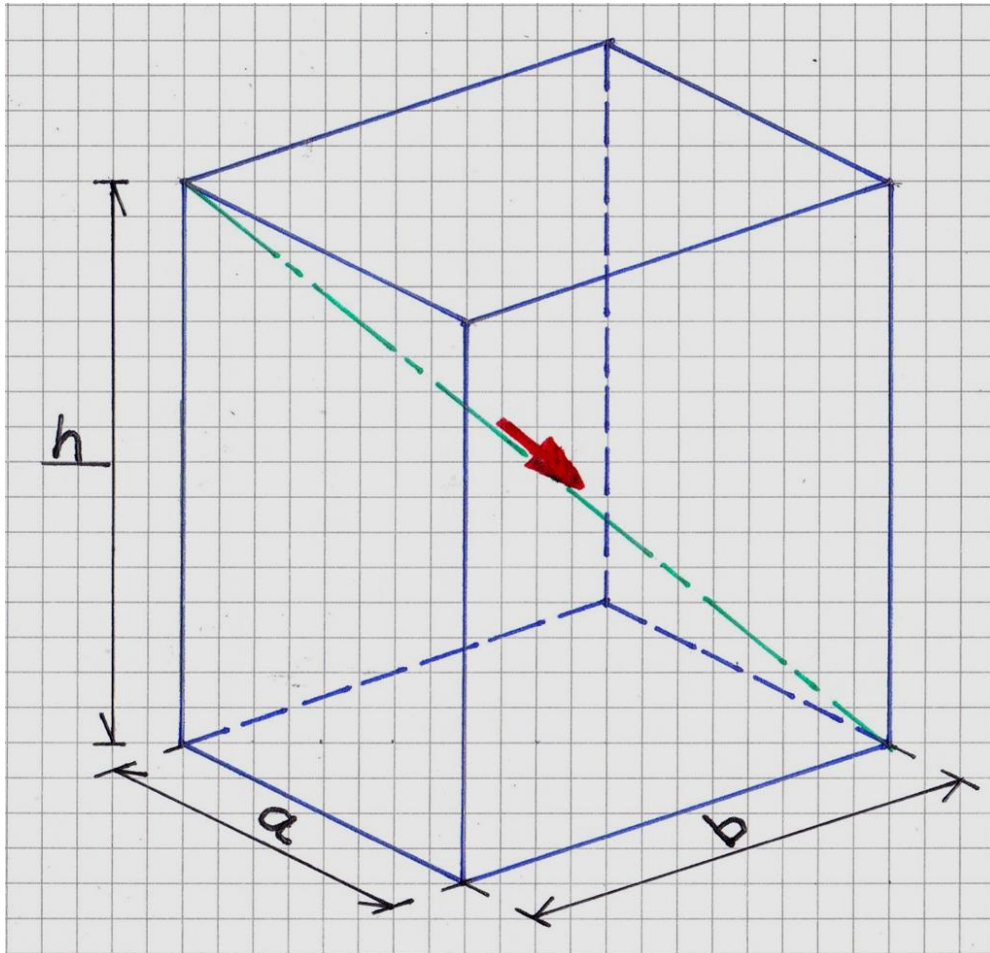


Hasáb metszése – 1.

Az alábbi feladat az előző dolgozatunk – melynek címe: *Egy derékszögű háromszög keresztmetszetű egyenes hasáb síkmetszete adatainak meghatározása számítással* – kapcsán támadt gondolataink eredménye. Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

A feladat

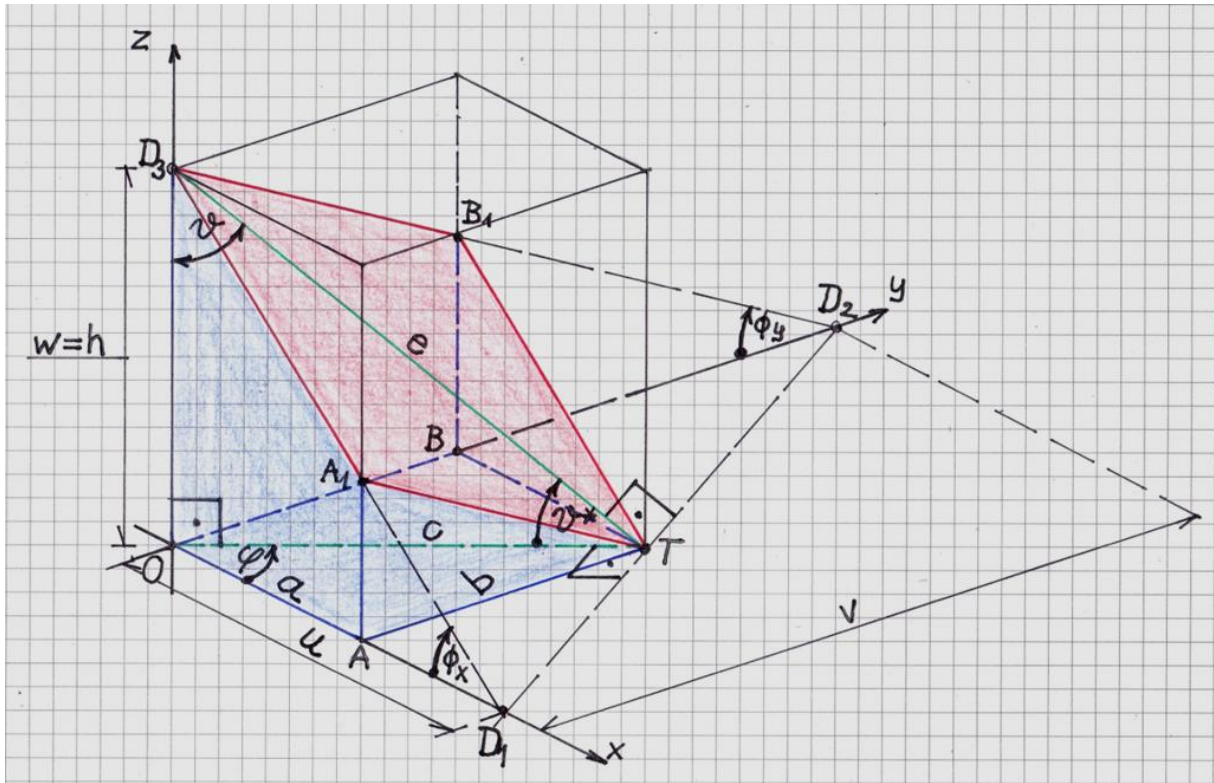
Adott a téglalap alapú, (a, b, h) adatokkal bíró egyenes hasáb.

Határozzuk meg

- azon síkmetszete sarokpontjainak az alapsík feletti magasságát, amely síkmetszet síkjának *esésvonala* a hasáb egy *testátlója*;
- a síkmetszet területét, (a, b, h) függvényében!

A megoldás

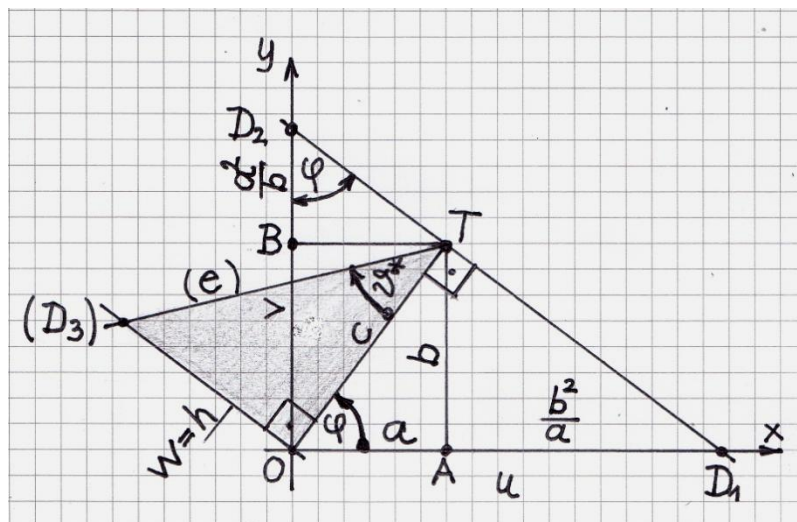
Ehhez tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

Itt a feladat geometriai megoldását láthatjuk. A teendő: ennek elmagyarázása / megértése. A geometriai lényeg:

~ ha a D_3T testátló az $A_1D_3B_1T$ metszet síkjának esésvonala, akkor a D_1D_2 nyomvonal a metszősík egy *szintvonala*, az esésvonal és a szintvonal pedig egymásra merőlegesek;
 ~ ekkor azonban az esésvonal OT vetülete is merőleges a D_1D_2 nyomvonalra, hiszen OT egyenesét a D_1D_2 nyomvonal körül ϑ^* szöggel elforgatva éppen D_3T egyenesébe jutunk. Ez utóbbi következmény szolgál a számítások alapjául. Ehhez tekintsük a 3. ábrát is!



3. ábra

Ennek alapján felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$\cos \varphi = \frac{a}{c} = \frac{c}{u} \rightarrow u = \frac{c^2}{a} = \frac{a^2+b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{u = a + \frac{b^2}{a}}. \quad (1)$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{c} = \frac{c}{v} \rightarrow v = \frac{c^2}{b} = \frac{a^2+b^2}{b} = b + \frac{a^2}{b}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{v = b + \frac{a^2}{b}}. \quad (2)$$

Az (1) és (2) eredményeket is feltüntettük a 3. ábrán, a későbbiek miatt.

Minthogy a feladat kiírása szerint a síkmetszet síkjának esésvonala a hasáb testátlója, így kell, hogy fennálljon az ábrákon is feltüntetett alábbi kapcsolat:

$$\underline{w = h}. \quad (3)$$

Az (1), (2) és (3) képletekkel, illetve $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ tengelymetszeteivel rögzítettük a metszősíkot, így jöhetnek a még megoldandó feladatrészek.

Először a metszeti síkidom csúcsainak $\mathbf{z}$ - koordinátáit állítjuk elő, a fentiek alapján:

$$\sim \underline{\underline{z_T = 0}}; \quad (4)$$

$$\sim \underline{\underline{z_{D_3} = h}}; \quad (5)$$

$$\sim z_{A_1} = \overline{AD_1} \cdot \operatorname{tg} \phi_x = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{w}{u} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{h}{\frac{a^2+b^2}{a}} = h \cdot \frac{b^2}{a^2+b^2}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{z_{A_1} = h \cdot \frac{b^2}{a^2+b^2}}}; \quad (6)$$

$$\sim z_{B_1} = \overline{BD_2} \cdot \operatorname{tg} \phi_y = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{w}{v} = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{h}{\frac{a^2+b^2}{b}} = h \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{z_{B_1} = h \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2}}}. \quad (7)$$

Másodszor a metszeti síkidom területét határozzuk meg:

$$T_{\text{metszet}} = \frac{T_{\text{vetület}}}{\cos \vartheta^*} = \frac{\frac{a \cdot b}{c}}{\frac{c}{\sqrt{c^2+h^2}}} = \frac{a \cdot b}{c} \cdot \sqrt{c^2+h^2} = a \cdot b \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} = a \cdot b \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2+b^2}},$$

tehát:

$$\underline{\underline{T_{\text{metszet}} = a \cdot b \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2+b^2}}}}. \quad (8)$$

Ezzel a kitűzött feladatokat megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. A 2. ábrán jelölt ϑ^* szög az alapsík és a metszősík hajlásszöge. Ez úgy áll elő, hogy az alapsík és a metszősík metszészíkjára egy merőleges síkot állítunk, mely mindkét síkból kimetsz egy egyenest, melyek a közbezárt szög szárai. A két közbezárt szög közül a kisebbik az alapsík és a metszősík hajlásszöge.

M2. A 2. ábra szerint a z_{A_1} és a z_{B_1} koordináták még így is számíthatók:

$$z_{A_1} = b \cdot \operatorname{tg} \phi_y = b \cdot \frac{h \cdot b}{a^2 + b^2} = h \cdot \frac{b^2}{a^2 + b^2},$$

$$z_{B_1} = a \cdot \operatorname{tg} \phi_x = a \cdot \frac{h \cdot a}{a^2 + b^2} = h \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

M3. A 2. ábrán is feltüntetett φ és ϑ szögekre írhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{c}{h} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{h} \rightarrow \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{h}.$$

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnöktanár

Szödliget, 2014. 11. 12.